

# ZESTAW WYBRANYCH WZORÓW MATEMATYCZNYCH

## Ciągi

### Ciąg arytmetyczny

Ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} = a_n + r.$$

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$$

Własności ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geq 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy  $r > 0$ ;

ciąg jest malejący, gdy  $r < 0$ ;

ciąg jest stały, gdy  $r = 0$ .

### Ciąg geometryczny

Ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ dla } n \geq 2$$

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = \begin{cases} n \cdot a, & \text{gdy } q = 1 \\ \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, & \text{gdy } q \neq 1 \end{cases}$$

Własności ciągu geometrycznego

$$|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}, \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geq 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy  $(q > 1 \text{ i } a_1 > 0)$  lub  $(q \in (0; 1) \text{ i } a_1 < 0)$

ciąg jest malejący, gdy  $(q > 1 \text{ i } a_1 < 0)$  lub  $(q \in (0; 1) \text{ i } a_1 > 0)$

ciąg jest stały, gdy  $q = 1$  lub  $a_1 = 0$

## Trygonometria

### Funkcje trygonometryczne

Funkcja zmiennej rzeczywistej	$D_f$	$\mathcal{C}_f$	Okres podstawowy
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1; 1 \rangle$	$2\pi$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1; 1 \rangle$	$2\pi$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ x: \bigwedge_{k \in \mathbb{C}} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$\mathbb{R}$	$\pi$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ x: \bigvee_{k \in \mathbb{C}} x = k \cdot \pi \right\}$	$\mathbb{R}$	$\pi$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (jedynka trygonometryczna)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \text{ gdy } \cos \alpha \neq 0 \text{ i } \sin \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ gdy } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \text{ gdy } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kąta

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istn.
$\operatorname{ctg} x$	nie istn.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

## Geometria analityczna

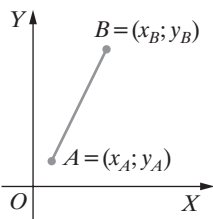
### Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach  $A = (x_A; y_A)$ ,  $B = (x_B; y_B)$  dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka  $AB$ :

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



### Prosta

Równanie ogólne prostej:  $Ax + By + C = 0$ ,

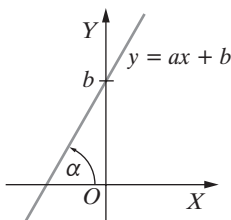
gdzie  $A^2 + B^2 \neq 0$  (tj. współczynniki  $A, B$  nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi  $OY$ , to

ma ona równanie kierunkowe:  $y = ax + b$

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta przechodząca przez dwa dane punkty  $A = (x_A; y_A)$ ,  $B = (x_B; y_B)$

jest wyrażona równaniem:  $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$ .

### Prosta i punkt

Odległość punktu  $P = (x_0; y_0)$  od prostej o równaniu  $Ax + By + C = 0$  dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$ ,
- są prostopadłe, gdy  $a_1 a_2 = -1$ .

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  to odpowiednio:

- są równoległe, gdy  $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ ,
- są prostopadłe, gdy  $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ .

### Równanie okręgu

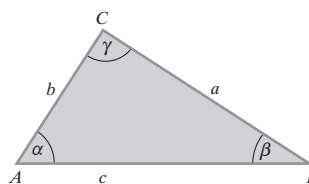
Równanie okręgu o środku w punkcie  $(a; b)$  i promieniu  $r$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ lub } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

gdzie  $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$ .

### Twierdzenie sinusów i cosinusów

Dany jest trójkąt:



a) **Twierdzenie sinusów (Snelliusa):**

Stosunek długości boków do sinusów kątów przeciwległych jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie:

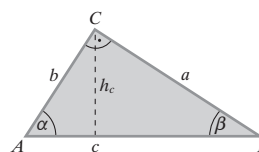
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

b) **Twierdzenie cosinusów (Carnota):**

Kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych bo-

$$\text{ków i cosinusa kąta zawartego między nimi: } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

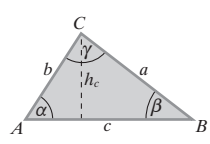
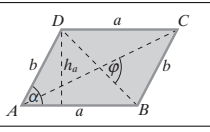
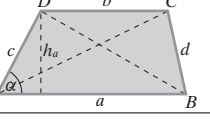
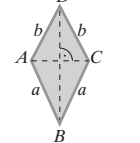
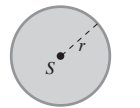
### Twierdzenie Pitagorasa



Suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

## Pola i obwody wybranych figur płaskich

Figury geometryczne	Pole	Obwód
Trójkąt: 	$P = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $P = b \cdot c \sin \alpha$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $P = r p$ ( $r$ - promień okręgu wpisanego w trójkąt) $P = \frac{abc}{4R}$ ( $R$ - promień okręgu opisanego na trójkącie)	$L = a + b + c$
Równoległobok: 	$P = a \cdot h_a$ $P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ $P = \frac{AC \cdot BD}{2} \sin \varphi$	$L = 2a + 2b$
Trapez: 	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h_a$ $P = \frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha$	$L = a + b + c + d$
Deltoid: 	$P = \frac{ AC  \cdot  BD }{2}$	$L = 2a + 2b$
Koło: 	$P = \pi r^2$	$L = 2\pi r$ (długość okręgu)

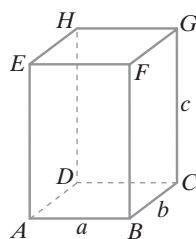
## Stereometria

### Oznaczenia

$P$  – pole powierzchni całkowitej  
 $P_p$  – pole powierzchni podstawy  
 $P_b$  – pole powierzchni bocznej  
 $V$  – objętość

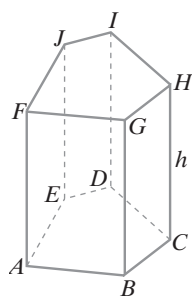
### Prostopadłościan

$P = 2(ab + bc + ac)$   
 $V = abc$ ,  
gdzie  $a, b, c$  są długościami krawędzi prostopadłościanu.



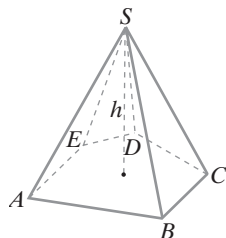
### Gnaniastosłup prosty

$P_b = 2p \cdot h$   
 $V = P_p \cdot h$ ,  
gdzie  $2p$  jest obwodem podstawy gnaniastosłupa.



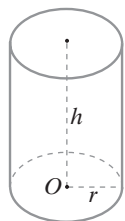
### Ostrosłup

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$ ,  
gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa.



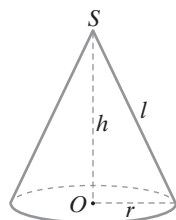
### Walec

$P_b = 2\pi r h$   
 $P = 2\pi r(r + h)$   
 $V = \pi r^2 h$ ,  
gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  
 $h$  wysokością walca.



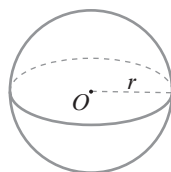
### Stożek

$P_b = \pi r l$   
 $P = \pi r(r + l)$   
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ,  
gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  
 $h$  – wysokością,  
 $l$  – długością tworzącej stożka.



### Kula

$P = 4\pi r^2$   
 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ,  
gdzie  $r$  jest promieniem kuli.



## Rachunek algebraiczny

### Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu  $x$  od punktu 0.

W szczególności:  $|x| \geq 0$ ,  $|-x| = |x|$

Dla dowolnych liczb  $x, y$  mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

### Potęgi i pierwiastki

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym  $n$ -tego stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

Jeżeli  $a < 0$  oraz liczba  $n$  jest nieparzysta, to  $n$ -ty pierwiastek z  $a$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\text{dla } a \neq 0: a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ oraz } a^0 = 1,$$

$$\text{dla } a \geq 0: a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\text{dla } a > 0: a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0, b \neq 0$ .

### Silnia

Silnią liczby całkowitej dodatniej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że  $0! = 1$ .

### Symbol Newtona

Dla liczb całkowitych  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy

$$\text{symbol Newtona: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

### Wzory skróconego mnożenia

Z dwumianu Newtona dla  $n = 2$  oraz  $n = 3$  otrzymujemy dla dowolnych liczb  $a, b$ :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

## Funkcje

### Funkcja i jej własności

**Funkcja rosnąca:**  $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

**Funkcja malejąca:**  $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**Funkcja nierosnąca:**  $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

**Funkcja niemalejąca:**  $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

**Funkcja ograniczona:**  $\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D_f} |f(x)| \leq M$

**Funkcja parzysta:**  $\bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)]$

**Funkcja nieparzysta:**  $\bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)]$

### Funkcja kwadratowa

a) Funkcja kwadratowa (inaczej: trójmian kwadratowy) jest to funkcja postaci  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ .

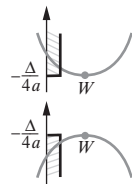
Uwaga: Gdyby  $a = 0$ , to funkcja byłaby liniowa:  $y = bx + c$ .

b) Wyróżnik trójmianu kwadratowego to liczba  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

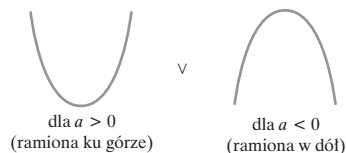
c) Dziedzina i zbiór wartości funkcji kwadratowej:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$Y_w = \begin{cases} \left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right) & \text{dla } a > 0 \\ \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right) & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$



d) Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola:



	Istnienie miejsc zerowych	Liczba miejsc zerowych
$\Delta > 0$	Istnieją.	Dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
$\Delta = 0$		Jedno miejsce zerowe $x_1 = x_2 = x_0$ $x_0 = -\frac{b}{2a} (=p)$
$\Delta < 0$	Nie istnieją.	Żadnych miejsc zerowych

### Wzory Viéte'a

Założenie:  $\Delta \geq 0$  (istnieją miejsca zerowe)

Wówczas:

suma:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ , iloczyn:  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

## Kombinatoryka

### Permutacje

Liczba sposobów, w jaki  $n \geq 1$  elementów można ustawić w ciąg, jest równa  $n!$ .

### Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa  $n^k$ .

### Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród  $n$  elementów można wybrać

$k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) elementów, jest równa  $\binom{n}{k}$ .

## Rachunek prawdopodobieństwa

### Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech  $\Omega$  będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A \subset \Omega$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie  $|A|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$ , zaś  $|\Omega|$  liczbę elementów zbioru  $\Omega$ .

### Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$  dla każdego zdarzenia  $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ ,  $\Omega$  – zdarzenie pewne

$P(\emptyset) = 0$ ,  $\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór  $\Omega$ )

$P(A) \leq P(B)$ , gdy  $A \subset B \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  dla dowolnych zdarzeń

$A, B \subset \Omega$ , zatem  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$  dla dowolnych zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ .

### Zdarzenia niezależne

Zdarzenia  $A \subset \Omega$  i  $B \subset \Omega$  są niezależne, gdy  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

### Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech  $A, B \subset \Omega$  będą zdarzeniami, przy czym  $P(B) > 0$ .

Prawdopodobieństwem warunkowym  $P(A|B)$  zajścia zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$